Proyecto MaTEX

Integral Definida

Fco Javier González Ortiz

Directorio

 javier.gonzalez@unican.es

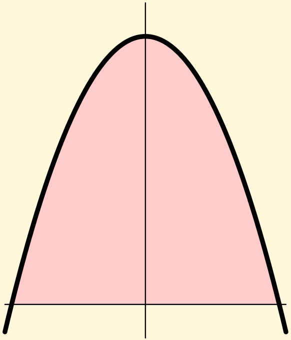
D.L.:SA-1415-2004

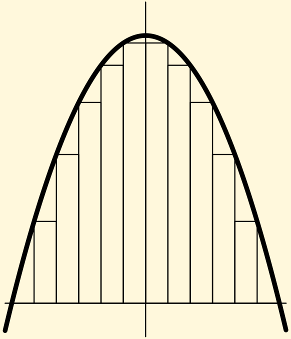
ISBN: 84-688-8267-4

Tabla de Contenido

1. Integral Definida

El problema planteado es hallar el área de la región que encierra la curva del gráfico con la recta horizontal.
Una idea sencilla consiste en dividir la región en rectángulos verticales y de esta forma de «llenar» la región con numerosos rectángulos.
De esta manera el área de la región se puede aproximar, cuanto queramos, mediante la suma de las áreas de n rectángulos, tomando todos con la misma base Δx.
Teniendo en cuenta que el área de cada rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura, tenemos que el área de cada rectángulo será la base Δx por su altura respectiva $f(x_i)$.
A la suma de las áreas de los rectángulos se les llama sumas de Riemann.

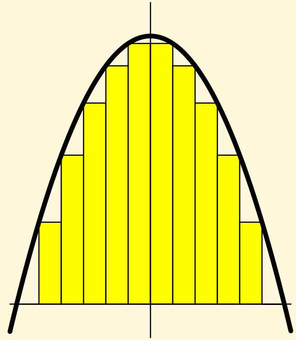




◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

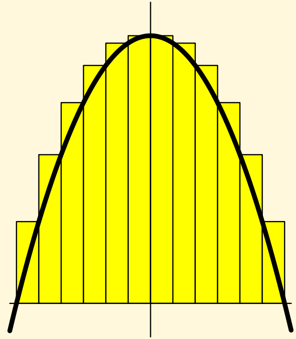
A la primera de ellas se le llama suma inferior S_{Inf}:

$$S_{Inf} = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta\,x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$\Longrightarrow \qquad S_{Inf} \leq \text{Área}$$



A la segunda de ellas se le llama suma superior S_{Sup}:

$$S_{Sup} = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta\,x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$
$$\Longrightarrow \qquad S_{Sup} \geq \text{Área}$$



Se tiene así que

$$\boxed{S_{Inf} \leq \text{Área} \leq S_{Sup}}$$

A medida que aumentamos el número de rectángulos n, $(n \to \infty)$ con $\Delta x \to 0$, el área buscada se podrá hallar con

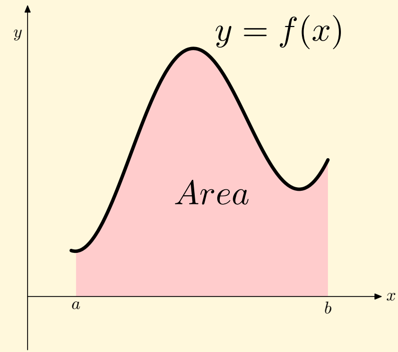
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x \tag{1}$$

El símbolo $\sum$ de sumatorio se convirtió en una "s" estilizada $\int$, quedando la expresión anterior con la notación

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x = \int_a^b f(x)\, dx$$

Definimos Integral Definida de $f(x)$ entre a y b, al área de la región limitada por la función $f(x)$ entre los puntos a y b y el eje OX. Dicho área lo representaremos con el símbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx$$



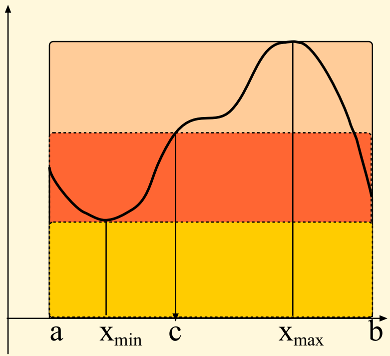
2. Tres teoremas fundamentales

2.1. Teorema de la media integral

Teorema 2.1. (Teorema de la media integral) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$. Entonces existe $c \in (a, b)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c) \quad c \in (a,b)} \tag{2}$$

El término de la izquierda en (2) representa el área bajo la función y el término de la derecha en (2) representa el área del rectángulo de base $b - a$ y altura $f(c)$.
El teorema anterior afirma que existe un rectángulo de altura $f(c)$ equivalente al área determinado por la función.



Doc Doc
Volver Cerrar

Ejemplo 2.1. Aplicar y explicar el teorema de la media integral a la función $f(x) = x^2 - 4x + 6$ en el intervalo $[1, 3]$.

Solución:

El área rosa bajo la curva entre $x = 1$ y $x = 3$ viene dada por

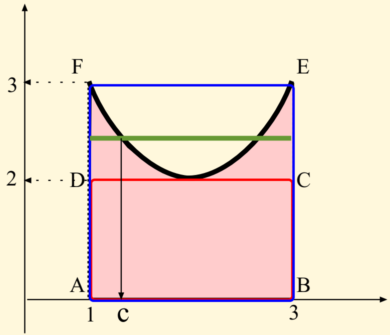
$$A = \int_1^3 (x^2 - 4x + 6)\, dx$$

Observar los rectángulos $ABCD$ y $ABEF$

área $ABCD < A <$ área $ABEF$

$(3 - 1) \cdot f(2) < A < (3 - 1) \cdot f(3)$

Existe un valor de $x = c$ de forma que el rectángulo de altura $f(c)$, línea verde, coincide con el área de la función.



$$A = \int_1^3 (x^2 - 4x + 6)\, dx = 2 \cdot f(c)$$

$\square$

Si bien las áreas que determina las funciones se pueden calcular con el método de los rectángulo, afortunadamente aquí no realizaremos límites de sumas de áreas de rectángulos como muestra la ecuación (1). Ello se debe a un resultado conocido como teorema fundamental del cálculo

2.2. Teorema Fundamental del Cálculo

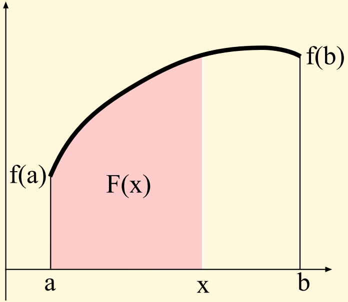
Teorema 2.2. (Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$. Entonces la función

$$\boxed{\begin{array}{c} F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\, dx \text{ es derivable} \\ F'(x) = f(x) \quad x \in (a, b) \end{array}} \tag{3}$$

El teorema demuestra que la función integral

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$$

que representa el área entre a y x es una primitiva de la función $f(x)$.



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

$\int_a^b f(x)\,dx$ representa un número y $\int_a^x f(x)\,dx$ representa una función de x.

Es importante recalcar que $\int_a^x f(x)\,dx$ es una función de x. Como los son

$$\int_a^x f(s)\,ds = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(w)\,dw$$

A $f(s), f(t)$ y $f(w)$ se les llama el integrando y las variables s, t o w son las variables auxiliares de integración.

Realiza el siguiente test para ver si se ha comprendido

Test. Sea la expresión $I = \int_2^3 a\,s^2\,ds$, responder a:

1. El significado de I es

(a) Integral Definida (b) Integral Indefinida

2. El significado de I es

(a) Un número (b) una función

3. El integrando de I es

(a) $a\,s^2\,ds$ (b) s^2 (c) $a\,s^2$

4. La variable de integración es

(a) a (b) ds (c) s

Test. Sea la expresión $I = \int_2^x (a+t^2)\,dt$, responder a:

1. El significado de I es

(a) Integral Definida (b) Integral Indefinida

2. El significado de I es

(a) Un número (b) una función

3. I es función de

(a) a (b) x (c) t

4. El integrando de I es

(a) $(a+t^2)\,dt$ (b) t^2 (c) $(a+t^2)$

5. La variable de integración es

(a) a (b) x (c) t

6. La derivada de I es

(a) $a+x^2$ (b) $a+t^2$ (c) $(a+t^2)\,dt$

Test. La derivada de la función $F(x) = \int (1+x^2)dx$ es

(a) $1+x^2$ (b) 0

Test. Responder a las cuestiones:

1. La derivada de $\int_2^x 2\,t\,dt$, es

(a) $2t$ (b) $2x$ (c) 0

2. La derivada de $\int_x^2 2\,t\,dt$, es

(a) $2x$ (b) $-2x$ (c) 0

3. La derivada de $\int_1^4 2\,t\,dt$, es

(a) $2x$ (b) 8 (c) 0

4. La derivada de $\int_x^{x+3} s^2\,ds$, es

(a) $(x+3)^2$ (b) $(x+3)^2 - x^2$ (c) x^2

5. La derivada de $\int_1^{x+1} \operatorname{sen} w\,dw$, es

(a) $\operatorname{sen}(x+1)$ (b) $\operatorname{sen} x$ (c) 0

2.3. Regla de Barrow

Teorema 2.3. (Regla de Barrow) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $I = [a, b]$ y $G(x)$ una primitiva de $f(x)$ Entonces la integral definida

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)} \tag{4}$$

Observaciones:

1. La importancia de esta regla es fundamental, ya que pone en relación el cálculo de áreas con el cálculo de primitivas.
2. Para hallar la integral definida seguiremos el siguiente proceso:
   a) Se halla una primitiva cualquiera de la función,
   b) Se sustituyen en esta primitiva los límites de integración -el superior y el inferior- y se restan los resultados.

Ejemplo 2.2. Hallar la integral definida $\displaystyle\int_0^\pi \cos x\,dx$

Solución: Hallamos una primitiva $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ luego

$$\int_0^\pi \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^\pi = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0$$

□

Ejemplo 2.3. Hallar la integral definida $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

Solución: Hallamos una primitiva $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}\,x^3$ luego

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,(1)^3 - \frac{1}{3}\,(0)^3 = \frac{1}{3}$$

□

Ejemplo 2.4. Calcular $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx$

Solución: Como $|x+2| = \begin{cases} -x-2 & x \leq -2 \\ x+2 & -2 < x \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx &= \int_{-3}^{-2} (-x-2)\,dx + \int_{-2}^{3} (x+2)\,dx + \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{3} \\
&= \left[(-2+4) - (-\frac{9}{2}+6)\right] + \left[(\frac{9}{2}+6) - (2-4)\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{25}{2}\right] = 13
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.5. Calcular la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \cos t \, dt$

Solución: Sea $G(x)$ una primitiva tal que

$$G'(x) = \cos x$$

por Barrow, $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \cos t \, dt = G(x^2) - G(0)$, derivando

$$F'(x) = G'(x^2) 2x = 2x \cos x^2$$

$\square$

Ejemplo 2.6. Calcular la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} 3\, e^t \, dt$

Solución: Sea $G(x)$ una primitiva tal que $G'(x) = 3\, e^x$ por Barrow, $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} 3\, e^t \, dt = G(x^3) - G(x^2)$, derivando

$$F'(x) = G'(x^3) 3x^2 - G'(x^2) 2x = 9x^2 e^{x^3} - 6x\, e^{x^2}$$

$\square$

Ejercicio 1. De todas las primitivas de la función $f(x) = 1 + x\,|x|$, determina aquella cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

Ejercicio 2. Hallar el valor de a para que

$$\int_{-a}^{a} ||x|-1| \, dx = 4$$

Ejercicio 3. Sea $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} \cos^2 t \, dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, 2\pi]$

Ejercicio 4. Sabemos que

$$\int_{0}^{x} f(t) \, dt = x^2(1+x)$$

siendo continua en R. Calcula $f(2)$.

Ejercicio 5. Calcular la derivada de

$$F(x) = \int_{sen\, x}^{cos\, x} t^2 \, dt$$

Ejercicio 6. Calcular la derivada de

$$F(x) = \int_{\int_1^{x^2} y^3 \, dy}^{3} \tan t \, dt$$

Ejercicio 7. Determinar los máximos y mínimos de la función

$$F(x) = \int_{1}^{e^x - x - 1} e^{-t^2} \, dt$$

Ejercicio 8. Determinar los puntos singulares de $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} s \, ds$

3. Aplicación. Cálculo de áreas

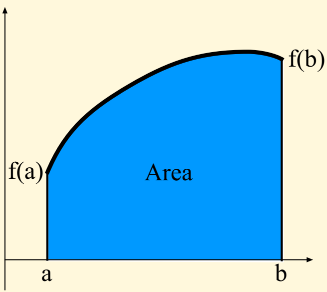
Para determinar el área bajo f distinguimos el signo de $f(x)$

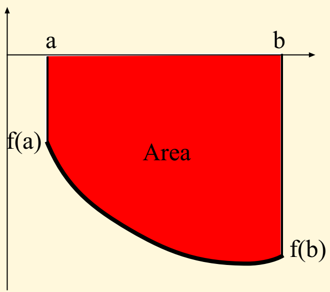
- Si $f(x) > 0 \quad x \in [a, b]$, entonces la integral definida es positiva

$$\text{Area del recinto} \; = \int_a^b f(x)\, dx$$

- Si $f(x) < 0 \quad x \in [a, b]$, entonces la integral definida es negativa

$$\text{Area del recinto} \; = -\int_a^b f(x)\, dx$$

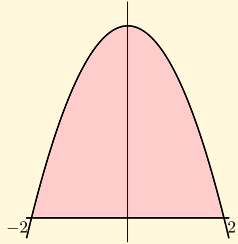




Ejemplo 3.1. Hallar el área limitada por $y = 4 - x^2$ y el eje OX.

Solución: La función $y = 4 - x^2$ corta al eje Ox en ± 2.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\ &= \left[4(2) - \frac{1}{3}2^3\right] - \left[4(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right] \\ &= \quad \boxed{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

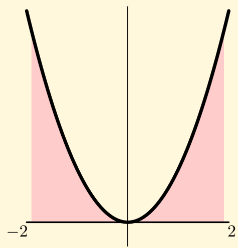


□

Ejemplo 3.2. Hallar el área limitada por $y = x^2$,$x = -2$, $x = 2$ y el eje OX.

Solución: La función $y = x^2$ corta al eje Ox en 0.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} (x^2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\ &= \left[\frac{1}{3}2^3\right] - \left[\frac{1}{3}(-2)^3\right] \\ &= \quad \boxed{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$



□

3.1. Area del recinto para una función

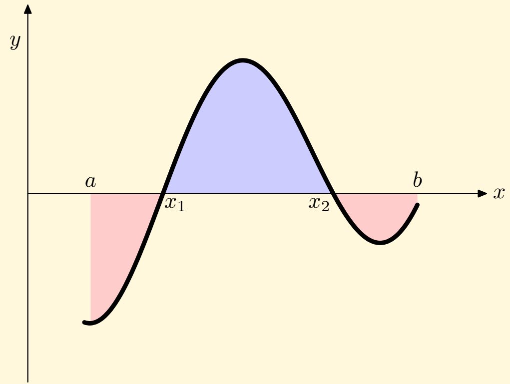
Para determinar el área de un recinto limitado por una función $f(x)$ y el eje OX entre los puntos a y b necesitamos saber si la función cambia de signo, hallando los cortes con el eje OX.
Después, se hallan las integrales definidas por separado en cada intervalo tomando sus valores en valor absoluto.
El área pedido será la suma de todas las áreas de cada uno de los recintos.

$$A_1 = \left| \int_a^{x_1} f(x)\,dx \right|$$

$$A_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$$A_3 = \left| \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx \right|$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$



$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\,dx \right| + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \left| \int_{x_2}^{b} f(x)\,dx \right|$$

Ejemplo 3.3. Hallar el área delimitada por la gráfica de $\cos x$, el eje OX en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución:

La función $\cos x$ corta al eje Ox en $\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{3\pi}{2}$.

Teniendo en cuenta los cambios de signo

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\, dx \right| + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x\, dx$$

luego

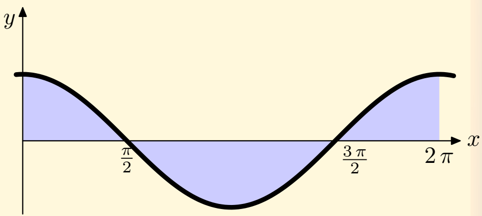
$$A_1 = \Big[\operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2} = 1$$

$$A_2 = \left| \Big[\operatorname{sen} x \Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right| = 2$$

$$A_3 = \Big[\operatorname{sen} x \Big]_{3\pi/2}^{2\pi} = 1$$

Luego

$$\boxed{Area = 4}$$



□

3.2. Para dos funciones positivas sin corte

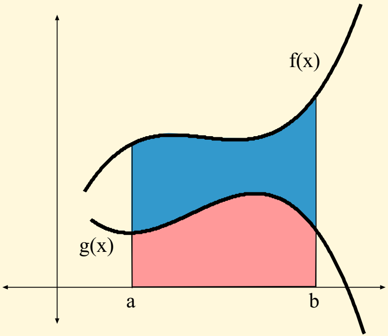
Para determinar el área de un recinto limitado por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ positivas sin corte entre los puntos a y b, como en la figura, teniendo en cuenta que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \quad \text{azul} + \text{rosa} \qquad \int_a^b g(x)\,dx = \quad \text{rosa}$$

el área del recinto comprendido entre ambas funciones se obtiene restando ambas integrales,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

resultando la sencilla expresión



$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx} \tag{5}$$

Ejemplo 3.4. Hallar el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

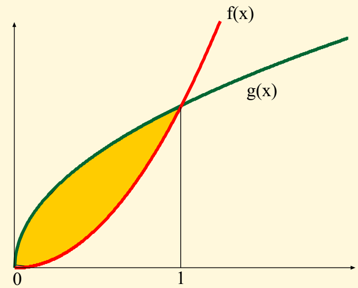
Solución: Hallamos la intersección de ambas

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 \\ g(x) = \sqrt{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Longrightarrow x = 0, 1$$

$$A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\, dx$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\, dx \\ &= \left[\frac{2}{3}\, x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3\right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\boxed{Area = \frac{1}{3}}$$

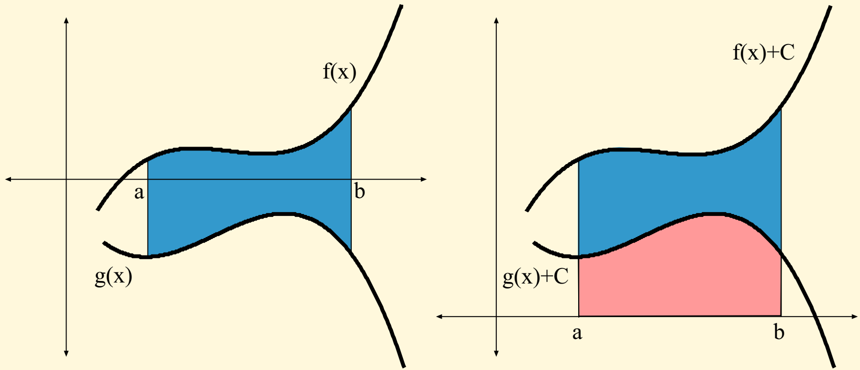


□

3.3. Para dos funciones cualesquiera sin corte

Para determinar el área de un recinto limitado por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ entre los puntos a y b pudiendo ser alguna o ambas negativas se aplica la misma expresión que para dos funciones positivas, ya que bastaría desplazar las funciones $f(x)+C$ y $g(x)+C$ como se muestra en el gráfico de la derecha

$$A = \int_a^b (f(x) + C - (g(x) + C))\ dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx$$



3.4. Para dos funciones que se cortan

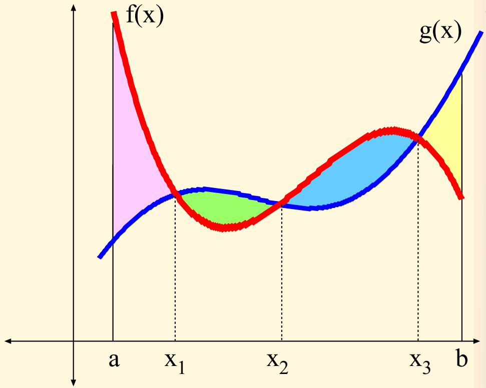
Para determinar el área de un recinto limitado por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ entre los puntos a y b necesitamos saber los puntos de corte entre ellas. Se hallan las integrales definidas por separado en valor absoluto y se suman todas las áreas.

$$A_1 = \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$A_2 = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$A_3 = \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$A_4 = \left| \int_{x_3}^{b} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$



$$A = A_1 + A_2 + A_2 + A_4$$

Ejercicio 9. Hallar el área delimitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

Ejercicio 10. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^2 + x$ e $y = x + 2$.

Ejercicio 11. Hallar el área limitada por $y = -x^2 + 4\,x + 5$ con al recta $y = 5$.

Ejercicio 12. Hallar el área limitada por $y = x^2 - 2\,x$ con al recta $y = x$.

Ejercicio 13. La curva $y = a[1 - (x - 2)^2]$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.

Ejercicio 14. Dada la función $f(x) = a\,e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}$, con $x \neq 0$,

a) Calcular $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ en función de a

b) Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ hallar a sabiendo que $F(1) = 0$ y $F(2) = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 15. De todas las primitivas de la función $f(x) = 1 + x\,|x|$, determina aquella cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

Ejercicio 16. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones e $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ y $g(x) = -x^2 + 1$.

Ejercicio 17. Hallar el área delimitada por la curva $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$, y $y = 1/2$.

Ejercicio 18. Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y recta la tangente a la curva de pendiente 6.

Ejercicio 19. Calcula el área de la región comprendida entre las funciones $y = 2 - x^2$ e $y = |x|$.

Ejercicio 20. Calcular la derivada de

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1 + t^2}\, dt$$

Soluciones a los Ejercicios

Prueba del Teorema 2.1. Siendo $f(x)$ continua en $[a, b]$ por el teorema de los Valores Extremos se alcanza el mínimo y el máximo en x_{min} y x_{max}. De la figura se tiene que

$$(b-a)\, f(x_{min}) \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\, f(x_{max)}$$

Dividiendo por $(b-a)$

$$f(x_{min} \le \overbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}^{(1)} \le f(x_{max)}$$

(1) es un número entre $f(x_{min})$ y $f(x_{max})$ que será alcanzado por un valor $c \in (a, b)$ por el teorema de los Valores Intermedios, luego

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

◄

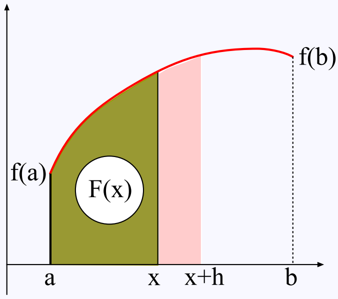
◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

Prueba del Teorema 2.2. Siendo $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ y $c \in (a,b)$ hallamos $F'(c)$

$$\begin{aligned} F'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{c+h} f(x)\,dx - \int_a^{c} f(x)\,dx}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_c^{c+h} f(x)\,dx}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot f(\alpha)}{h} \overset{(2)}{=} \boxed{f(c)} \end{aligned}$$

(1) por el teorema de la media Integral, con $\alpha \in (c, c+h)$

(2) cuando $h \to 0, \alpha \to c$



Prueba del Teorema 2.3. Sea $G(x)$ una primitiva de $f(x)$, como la función integral $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ es una primitiva de $f(x)$ ya que

$$F'(x) = f(x)$$

se tiene

$$F(x) = G(x) + C$$

- $F(a) = G(a) + C \Longrightarrow C = -G(a)$
- $F(b) = G(b) + C = G(b) - G(a)$

luego

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

◀

Ejercicio 1. Sea $f(x) = 1 + x\,|x|$, Como

$$f(x) = 1 + x\,|x| = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ 1 + x^2 & 0 < x \end{cases}$$

las primitivas de $f(x)$ son

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \begin{cases} x - \dfrac{1}{3}x^3 + C_1 & x < 0 \\ x + \dfrac{1}{3}x^3 + C_2 & 0 < x \end{cases}$$

para que pase por el punto $(0,1)$, exigimos que

$$F(0^-) = F(0^+) = 1$$

luego

$$\boxed{C_1 = C_2 = 1}$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2. Sea $\displaystyle\int_{-a}^{a} ||x|-1|\,dx = 4$, Como

$$||x|-1| = \begin{cases} -x-1 & x \leq -1 \\ x+1 & -1 < x \leq 0 \\ -x+1 & 0 < x \leq 1 \\ x-1 & 1 < x \end{cases}$$

$$\int_{-a}^{a} ||x|-1|\,dx = \int_{-a}^{-1} (-x-1)\,dx + \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx +$$

$$\int_{0}^{1} (-x+1)\,dx + \int_{1}^{a} (x-1)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-a}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{1}^{a}$$

$$= a^2 - 2a + 2$$

De $a^2 - 2a + 2 = 4 \Longrightarrow a = 1 + \sqrt{3}$. Ejercicio 2

Ejercicio 3. Siendo $F(x)=\int_1^x \cos^2 t\,dt$, sea $G(x)$ una primitiva tal que

$$G'(x)=\cos^2 x$$

por Barrow, $F(x)=G(x)-G(1)$, derivando

$$F'(x)=G'(x)=\cos^2 x \Longrightarrow \cos^2 x=0$$

$$\cos^2 x=0 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

Con el criterio de la segunda derivada,

$$F''(x)=-2\cos x\ \operatorname{sen} x \Longrightarrow F''(\frac{\pi}{2})$$

Ejercicio 3

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 4. Sea $G(x)$ una primitiva tal que

$$G'(x) = f(x)$$

por Barrow, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x) = G(x) - G(0)$, derivando

$$2x(1+x) + x^2 = G'(x) = f(x)$$

luego

$$f(x) = 2x + 3x^2$$

y por tanto $\boxed{f(2) = 16}$ Ejercicio 4

Ejercicio 5. Sea $G(x)$ una primitiva tal que

$$G'(x) = x^2$$

por Barrow, $F(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} t^2\, dt = G(\cos x) - G(\operatorname{sen} x)$, derivando

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\operatorname{sen} x\, G'(\cos x) - \cos x\, G'(\operatorname{sen} x) \\ &= -\operatorname{sen} x\, \cos^2 x - \cos x\, \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

Ejercicio 5

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 6. Sea $G(x)$ una primitiva tal que

$$G'(x) = \tan x$$

como

$$\int_1^{x^2} y^3\, dy = \left[\frac{1}{4} y^4\right]_1^{x^2} = \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{4}$$

por Barrow,

$$F(x) = \int_{\frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{4}}^{3} \tan t\, dt = G(3) - G(\frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{4})$$

derivando

$$\begin{aligned} F'(x) &= -G'\left(\frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{4}\right) 2x^7 \\ &= -2x^7 \tan\left(\frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 6

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 7. Sea $G(x)$ una primitiva tal que

$$G'(x) = e^{-x^2}$$

por Barrow,

$$F(x) = \int_1^{e^x - x - 1} e^{-t^2}\, dt = G(e^x - x - 1) - G(1)$$

derivando

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'\left(e^x - x - 1\right)\left(e^x - 1\right) \\ &= e^{-(e^x - x - 1)^2}\left(e^x - 1\right) \end{aligned}$$

$$F'(x) = 0 \Longrightarrow e^x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	$F(0)$	$\nearrow$	

En $x = 0$ hay un mínimo.

Ejercicio 7

Ejercicio 8. Sea $G(x)$ una primitiva tal que

$$G'(x) = \operatorname{sen} x$$

por Barrow,

$$F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} s\, ds = G(x^2) - G(0)$$

derivando

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x\, G'\left(x^2\right) \\ &= 2x\ \operatorname{sen} x^2 \end{aligned}$$

Los puntos singulares son las soluciones de $F'(x) = 0$, luego

$$2x\ \operatorname{sen} x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{k\,\pi}, k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$$

Ejercicio 8

Ejercicio 9. Sea $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, hallamos los puntos de corte con el eje OX

$$y = x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Longrightarrow x = 0, 2, 4$$

una primitiva,

$$F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^2 f(x)\, dx\right| &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = |4| \\
\left|\int_2^4 f(x)\, dx\right| &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 = |-4| \\
&= \text{Area del recinto} = \mathbf{8}
\end{aligned}$$

Ejercicio 9

Ejercicio 10. Sean $y = x^2 + x$ e $y = x + 2$, hallamos los puntos de corte entre ambas

$$\left.\begin{array}{c} y = x^2 + x \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 + x = x + 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

una primitiva de $f - g$,

$$F(x) = \int [(x^2 + x) - (x + 2)]\, dx = \int (x^2 - 2)]\, dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x) - g(x)\, dx \right| &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = |-\frac{4}{3}\sqrt{2}| \\ &= \text{Area del recinto} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

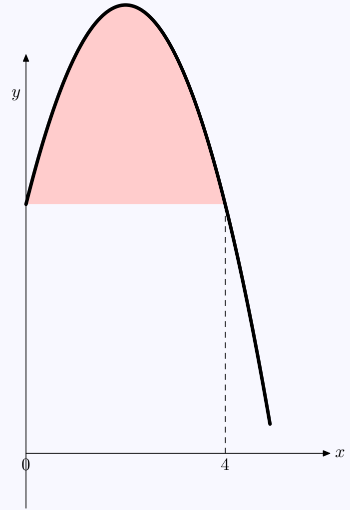
Ejercicio 10

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11.
Hallamos los puntos de corte:

$$-x^2 + 4\,x + 5 = 5 \Longrightarrow x = 0 \;\; x = 4$$

$$\begin{aligned} Area &= \int_0^4 (-x^2 + 4\,x + 5 - 5)\,dx \\ &= \int_0^4 (-x^2 + 4\,x)\,dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + 2\,x^2\right)_0^4 \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 32\right) - 0 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

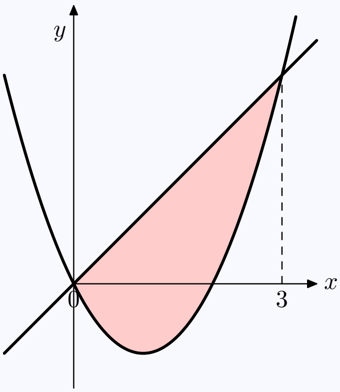


Ejercicio 11

Ejercicio 12.
Hallamos los puntos de corte:

$$x^2 - 2\,x = x \Longrightarrow x = 0 \; x = 3$$

$$\begin{aligned} Area &= \int_0^3 (x - x^2 + 2\,x)\,dx \\ &= \int_0^3 (3\,x - x^2)\,dx \\ &= \left(\frac{3\,x^2}{2} - \frac{1}{3}\,x^3\right)_0^3 \\ &= \left(\frac{27}{2} - 9\right) - 0 \\ &= \frac{27}{6} \end{aligned}$$



Ejercicio 12

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 13.
Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$$a\left[1-(x-2)^2\right]=0 \Longrightarrow 1=(x-2)^2 \Longrightarrow x=1\ x=3$$

Igualamos el área a 12

$$\begin{aligned} a\int_1^3 (1-(x-2)^2)\,dx &= a\left(x-\frac{(x-2)^3}{3}\right)_1^3 \\ 12 &= a\left(3-\frac{1}{3}\right)-a\left(1+\frac{1}{3}\right) \\ 12 &= a\cdot\frac{4}{3} \\ &\boxed{a=9} \end{aligned}$$

Ejercicio 13

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 14.

Siedno $f(x) = a\,e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}$, con $x \neq 0$,

a)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (a\,e^{x/3} + \frac{1}{x^2})\,dx &= \int_1^2 a\,e^{x/3}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \left(3\,a\,e^{x/3}\right)_1^2 - \left(\frac{1}{x}\right)_1^2 \\
&= 3\,a\,(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Una primitiva es $F(x) = 3\,a\,e^{x/3} - \dfrac{1}{x} + k$. Hallar a y k con las condiciones $F(1) = 0$ y $F(2) = \dfrac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{rcl}
3\,a\,e^{1/3} - \dfrac{1}{1} + k & = & 0 \\
3\,a\,e^{2/3} - \dfrac{1}{2} + k & = & \dfrac{1}{2}
\end{array}\right\}
\left.\begin{array}{rcl}
3\,a\,e^{1/3} + k & = & 1 \\
3\,a\,e^{2/3} + k & = & 1
\end{array}\right\}$$

$$\boxed{a = 0} \qquad \boxed{k = 1}$$

Ejercicio 14

Ejercicio 15. Sea $f(x) = 1 + x\,|x|$, Como

$$f(x) = 1 + x\,|x| = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ 1 + x^2 & 0 < x \end{cases}$$

las primitivas de $f(x)$ son

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \begin{cases} x - \dfrac{1}{3}x^3 + C_1 & x < 0 \\ x + \dfrac{1}{3}x^3 + C_2 & 0 < x \end{cases}$$

para que pase por el punto $(0, 1)$, exigimos que

$$F(0^-) = F(0^+) = 1$$

luego

$$\boxed{C_1 = C_2 = 1}$$

Ejercicio 15

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 16. Sean $y = -x^2 + 1$ e $y = x^4 - 2x^2 + 1$, hallamos los puntos de corte entre ambas

$$\left.\begin{array}{c} y = -x^2 + 1 \\ y = x^4 - 2x^2 + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow -x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 \Longrightarrow x = 0, \pm 1$$

una primitiva de $f(x) - g(x) = x^4 - 2x^2 + 1 - (-x^2 + 1) = x^4 - x^2$,

$$F(x) = \int (x^4 - x^2)\, dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$$

$$\begin{aligned} \left|\int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\, dx\right| &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} &= |-\frac{2}{15}| \\ \left|\int_{0}^{1} f(x) - g(x)\, dx\right| &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} &= |-\frac{2}{15}| \\ &= \text{Area del recinto} &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Ejercicio 16

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

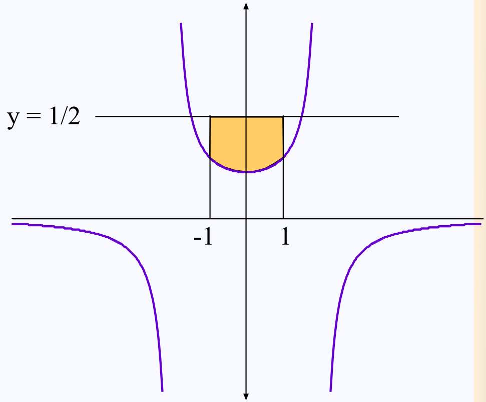
Ejercicio 17. Sean $f(x) = 1/2$ e $g(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$,

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4-x^2}$$

$$F(x) = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{4-x^2})\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln\frac{2-x}{2+x}$$

$$\text{Área} = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln\frac{2-x}{2+x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= |1 + \frac{1}{2}\,\ln 3|$$



Ejercicio 17

Ejercicio 18. Sea $y = x^2 + 2x + 2$

- Recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo. Como $y' = 2x + 2$, $y' = 0 \Longrightarrow x = -1$, el punto $(-1, 1)$ es un mínimo. La ecuación de su tangente es
$$y_1 = 1$$
- Recta la tangente a la curva de pendiente 6. Como $y' = 2x + 2$, $y' = 6 \Longrightarrow 2x + 2 = 6 \Longrightarrow x = 2$, el punto es $(2, 10)$ y la tangente es
$$y_2 - 10 = 6(x - 2) \Longrightarrow y_2 = 6x - 2$$

Las tangentes se cortan en

$$\left.\begin{array}{r} y_1 = 1 \\ y_2 = 6x - 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 6x - 2 = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Area bajo la parábola:

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 2)\, dx \quad = \quad \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} \quad = \quad 12$$

Area pedida es el recinto azul, igual al área bajo la parábola menos el rectángulo marrón y el trapecio rosa.

Area del rectángulo marrón

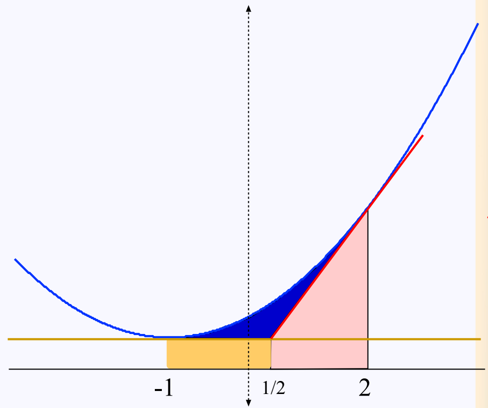
$$\int_{-1}^{1/2} 1\, dx = \frac{3}{2}$$

Area del trapecio rosa

$$\int_{1/2}^{2} (6x-2)\, dx = \frac{33}{4}$$

Recinto azul

$$12 - \left(\frac{3}{2} + \frac{33}{4}\right) = \boxed{\frac{9}{4}}$$



Ejercicio 18

Ejercicio 19. Sean $y = 2 - x^2$ e $y = |x|$, hallamos los puntos de corte entre ambas

$$\left.\begin{array}{c} y = 2 - x^2 \\ y = |x| \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (x < 0) & -x = 2 - x^2 \Longrightarrow x = \boxed{-1}, 2 \\ (x > 0) & x = 2 - x^2 \Longrightarrow x = \boxed{1}, -2 \end{array}\right\}$$

Area pedida

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx \right| &= \left| \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - |x|)\, dx \right| \\ &= \left| \int_{-1}^{0} (2 - x^2 + x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx \right| \\ &= \frac{13}{6} + \frac{13}{6} \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 19

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 20. Sea $G(x)$ una primitiva tal que

$$G'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

por Barrow,

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt = G(x^2) - G(0)$$

derivando

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x\,G'\left(x^2\right) \\ &= 2x\,\frac{1}{1+x^4} \end{aligned}$$

Ejercicio 20

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int (1+x^2)dx = (1+x^2)$$

Final del Test

Índice alfabético